

Dualität von Zentralpotentialen

In dem Artikel

Aaron K. Grant, Jonathan L. Rosner, "Classical Orbits in power-law potentials",
American Journal of Physics **62** (1994), 310–315

diskutieren die Autoren die Bahnkurven eines Teilchens, das sich in einem Zentralpotential der Form $V(r) = \lambda r^\alpha$ bewegt. Verschaffen Sie sich eine Kopie dieses Artikels, lesen Sie ihn gründlich durch und fassen Sie den Inhalt in einem eigenen Text zusammen. Insbesondere soll ihre Darstellung folgende Fragen beantworten:

- Die Autoren behaupten, dass zwischen den Bahnkurven in den Potentialen $V(r) = \lambda r^\alpha$ und $V(r) = \bar{\lambda} r^{\bar{\alpha}}$ ein Zusammenhang besteht, wenn

$$(2 + \alpha)(2 + \bar{\alpha}) = 4 \tag{1}$$

gilt.

- Woher kommt Gleichung (1)?
- Worin genau besteht der Zusammenhang zwischen den Bahnkurven?
- Welches Potential ist auf diese Weise mit dem Gravitationspotential verwandt?
- Die Autoren geben auch eine Herleitung der Dualitätsrelation (1) mit Hilfe komplexer Analysis an. Erläutern Sie diese Herleitung!
- Am Ende von Kapitel III beweisen die Autoren, dass nur die Potentiale $V(r) = \lambda r^{-1}$ und $V(r) = \lambda r^2$ geschlossene Bahnkurven liefern (Bertrands Theorem). Erläutern Sie die Beweisführung und erklären Sie insbesondere die Herkunft der Gleichung (35).

Hinweise: Die Bemerkungen zur Quantenmechanik in Potentialen $V(r) = \lambda r^\alpha$ können Sie ignorieren, falls Sie die noch nicht verstehen. Es steht ihnen natürlich frei, auch andere Literatur zur Bearbeitung der Fragen heranzuziehen, solange Sie ihre Quellen angeben.

Für eine vollständige Bearbeitung dieses Projektes gibt es **12 Punkte**. Beachten Sie die verlängerte Abgabefrist, die Abgabe erfolgt am 09.12.2008.