1. **Kugelkoordinaten.** In Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) ist die Bahnkurve eines Massenpunktes von der Form $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$. Geben Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung ebenfalls in Kugelkoordinaten an. (3 Pkt.)

Lösung: Die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ geben die Richtung der Änderung von $\vec{r}$ bei der Änderung $r \to r + \mathrm{d}r$, $\theta \to \theta + \mathrm{d}\theta$ oder $\phi \to \phi + \mathrm{d}\phi$ an. Wir drücken sie durch die kartesischen Einheitsvektoren aus:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z \\
\vec{e}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z \\
\vec{e}_\phi &= -\sin\phi\,\vec{e}_x + \cos\phi\,\vec{e}_y
\end{aligned}$$

Die kartesischen Basisvektoren sind zeitunabhängig. Daher wirken die Zeitableitungen nur auf die Vorfaktoren. In der Darstellung als Spaltenvektoren erhalten wir

$$\vec{e}_r := \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \to \quad \dot{\vec{e}}_r = \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi\,\dot\theta - \sin\theta\sin\phi\,\dot\phi \\ \cos\theta\sin\phi\,\dot\theta + \sin\theta\cos\phi\,\dot\phi \\ -\sin\theta\,\dot\theta \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\dot{\vec{e}}_r$ kann durch die Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\phi$ ausgedrückt werden. Mit den analogen Ausdrücken für $\dot{\vec{e}}_\theta$ und $\dot{\vec{e}}_\phi$ erhalten wir so

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot\theta\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot\phi\vec{e}_\phi\,, \qquad \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot\theta\vec{e}_r - \cos\theta\,\dot\phi\vec{e}_\phi \qquad \text{und} \qquad \dot{\vec{e}}_\phi = -\sin\theta\,\dot\phi\vec{e}_r - \cos\theta\,\dot\phi\vec{e}_\theta\,.$$

Wir leiten nun die Bahnkurve $\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$ nach der Zeit ab:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot r\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r = \dot r\vec{e}_r + r\dot\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot\phi\vec{e}_\phi$$

Die Differentiation der Geschwindigkeit ergibt die Beschleunigung.

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &= (\ddot r - r\dot\theta^2 - r\sin^2\theta\,\dot\phi^2)\vec{e}_r + (r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta - r\sin\theta\cos\theta\,\dot\phi^2)\vec{e}_\theta + \\
&\quad (r\sin\theta\,\ddot\phi + 2\sin\theta\,\dot r\dot\phi + 2r\cos\theta\,\dot\theta\dot\phi)\vec{e}_\phi
\end{aligned}$$

2. **Ameisen in der Ebene.** Vier Ameisen befinden sich an den Eckpunkten eines Quadrats mit der Kantenlänge a. Jede von ihnen bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v im Uhrzeigersinn auf die nächste zu, d.h. die Geschwindigkeit ist in jedem Moment auf diese gerichtet. Die Ameisen können als punktförmig angesehen werden.
   (a) Beschreiben Sie die Bahnkurve der Ameisen in ebenen Polarkoordinaten, wobei der Mittelpunkt des Quadrats mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. (2 Pkt.)
   Hinweis: Aus Symmetriegründen muss nur eine Ameise betrachtet werden. Wählen Sie hierzu eine Ameise, die sich zur Zeit $t = 0$ bei $r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ und $\varphi = 0$ befindet und berechnen sie $r(\varphi)$ statt $r(t)$ und $\varphi(t)$.
   (b) Berechnen Sie den von jeder Ameise zurück gelegten Weg und die Zeit bis die Ameisen sich treffen. Wie lautet die Winkelgeschwindigkeit entlang des Weges? (2 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Wegen der Symmetrie des Problems bzgl. einer Rotation um $\frac{\pi}{2}$ werden sich die vier Ameisen auch für $t > 0$ auf einem Quadrat befinden. In ebenen Polarkoordinaten lautet die Geschwindikeit der Ameisen

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \,.$$

Da die Geschwindigkeit der Ameisen immer in Richtung einer Sehne zeigt, die sowohl mit $\vec{e}_r$ als auch mit $\vec{e}_\varphi$ einen Winkel von $\frac{\pi}{4}$ bildet, gilt

$$\dot{r} = r\dot{\varphi} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \,.$$

Man beachte hierbei, dass φ im Uhrzeigersinn kleiner wird! Mit der Eliminierung der Zeit als unabhängige Variable

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}$$

lautet die Bewegungsgleichung für $r(\varphi)$

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \,.$$

Diese Differentialgleichung hat mit den Anfangsbedingungen aus dem Hinweis die Lösung

$$r(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, a\, \mathrm{e}^{\varphi} \,.$$

Die Ameisen laufen also auf einer Spirale auf den Koordinatenursprung zu.

(b) Die Weglänge berechnet sich nach

$$l = \int \sqrt{d\vec{r}\, d\vec{r}} = -\int_0^{-\infty} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2}\, d\varphi \,.$$

Mit der Bewegungsgleichung ergibt sich das Integral zu

$$l = -\sqrt{2}\int_0^{-\infty} r(\varphi) d\varphi = -a\int_0^{-\infty} \mathrm{e}^{\varphi}\, d\varphi = a \,.$$

Man beachte, dass der Weg endlich bleibt, obwohl die Ameisen den Ursprung unendlich oft umrunden. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ergibt sich auch aus $r\dot{\varphi} = -\frac{v}{\sqrt{2}}$ zu

$$\dot{\varphi} = -\frac{v}{\sqrt{2}r} = -\frac{v}{a}\mathrm{e}^{-\varphi} \,.$$

Da der Winkel von 0 bis $-\infty$ läuft, wird die Winkelgeschwindigkeit unendlich groß, weswegen die Ameisen in endlicher Zeit

$$t = \frac{l}{v} = \frac{a}{v}$$

ankommen.

3. **Lorentztransformation aus konstanter Lichtgeschwindigkeit.** Zwei Inertialsysteme Σ und Σ' bewegen sich mit der Geschwindigkeit v gegeneinander geradlinig gleichförmig in x-Richtung. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ fallen beide Systeme zusammen. (4 Pkt.)

   Wie transformieren sich Orte und Zeiten vom System Σ ins System Σ' unter der An- nahme, dass die Lichtgeschwindigkeit c in beiden Inertialsystemen den gleichen Wert besitzt? Betrachten Sie dazu die Ausbreitung eines Lichtblitzes, welcher zur Zeit $t_0 = t'_0 = 0$ im Koordinatenursprung der Inertialsysteme zündet.

Lösung: Für den Lichtblitz in Σ und Σ' gilt unter der Annahme, dass die Lichtgeschwindigkeit konstant ist:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 = c^2t^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= r^2 = c^2t'^2, \end{aligned} \tag{1}$$

denn der Lichtblitz breitet sich in beiden Systemen als Kugelwelle aus, die zum Zeitpunkt t bzw. t' den Radius r besitzt. r ist in beiden Systemen gleich, da die Ausbreitung einer Kugelwelle nicht vom Bezugssystem abhängt; da auch c in beiden Systemen als gleich vorausgesetzt ist, gilt $r = ct = ct'$.

Da die Relativbewegung der Inertialsysteme entlang der x-Achse erfolgt, gilt $y = y'$ und $z = z'$. Einsetzen in (1) ergibt

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2; \tag{2}$$

gesucht sind die Transformationen

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x - vt) \\ x &= \gamma'(v)(x' + vt), \end{aligned} \tag{3}$$

was für die Zeit t' zur Transformation

$$t' = \gamma(v)\left(t - \frac{x}{v}\left(1 - \frac{1}{\gamma(v)\gamma'(v)}\right)\right) \tag{4}$$

führt. Einsetzen in (2) liefert dann durch Koeffizientenvergleich

$$\gamma(v) = \gamma'(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{5}$$

4. **Lorentzgruppe.** Eine Eigenschaft der Lorentz-Transformationen ist, das sie eine *Gruppe* bilden. In dieser Aufgabe soll das für eine spezielle Menge an Transformationen, nämlich solche, die Bezugssysteme mit parallelen Achsen, die sich entlang der x-Achse relativ zueinander bewegen, überprüft werden. Eine solche Transformation kann als Matrix dargestellt werden: (4 Pkt.)

$$\Lambda(v) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \tag{6}$$

   mit $\beta = v/c$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Eine solche Transformation überführt den Vektor (x, y, z, ct) in (x', y', z', ct').

Zeigen Sie, das diese Transformationen eine Gruppe bilden.

Lösung: Nachweis der Gruppeneigenschaften:

- Neutrales Element: Die vierdimensionale Einheitsmatrix $I = \Lambda(v = 0)$ ist Teil der betrachteten Menge und erfüllt $I\Lambda(v) = \Lambda(v)I = \Lambda(v)$. Physikalisch überführt sie ein Inertialsystem in sich selbst – und natürlich bewegt sich jedes System gegenüber sich selbst mit der Geschwindigkeit $v = 0$.

- Inverses Element: Es ist

$$\Lambda(v)\Lambda(-v) = \begin{pmatrix} \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 & 0 & 0 & \beta\gamma^2 - \beta\gamma^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma^2 + \beta\gamma^2 & 0 & 0 & -\beta^2\gamma^2 + \gamma^2 \end{pmatrix} = I, \tag{7}$$

  und analog gilt auch $\Lambda(-v)\Lambda(v) = I$. Es existiert also zu jeder Transformation eine inverse Transformation.

- Abgeschlossenheit: Nun ist noch zu zeigen, das die Verknüpfung zweier Transformationen wieder eine liefert. Zunächst setzen wir $\tanh \Phi = \beta$, dann ist $\cosh \Phi = \gamma$ und $\sinh \Phi = \gamma\beta$, und es ist

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \begin{pmatrix} \cosh \Phi_1 & 0 & 0 & -\sinh \Phi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \Phi_1 & 0 & 0 & \cosh \Phi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \Phi_2 & 0 & 0 & -\sinh \Phi_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \Phi_2 & 0 & 0 & \cosh \Phi_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh \Phi_1 \cosh \phi_2 + \sinh \Phi_1 \sinh \Phi_2 & 0 & 0 & -\cosh \Phi_1 \sinh \Phi_2 - \cosh \Phi_2 \sinh \Phi_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \Phi_1 \cosh \Phi_2 - \cosh \Phi_1 \sinh \Phi_2 & 0 & 0 & \cosh \Phi_1 \cosh \Phi_2 + \sinh \Phi_1 \sinh \Phi_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

  Mit $\cosh \Phi_1 \cosh \Phi_2 + \sinh \Phi_1 \sinh \Phi_2 = \cosh(\Phi_1 + \Phi_2)$,
  $\sinh \Phi_1 \cosh \Phi_2 + \cosh \Phi_1 \sinh \Phi_2 = \sinh(\Phi_1 + \Phi_2)$ und $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ gilt also

$$\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \begin{pmatrix} \cosh \Phi & 0 & 0 & -\sinh \Phi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \Phi & 0 & 0 & \cosh \Phi \end{pmatrix}, \tag{9}$$

  die Menge ist also abgeschlossen.

Damit bilden die hier betrachteten, speziellen Lorentztransformationen eine Gruppe.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **15 Punkte** zu erreichen, Abgabe erfolgt am 21. 10. 2008.