1. **TEM-Moden im Koaxialkabel.** Ein Koaxialkabel kann eine reine TEM-Welle übertragen, während in einem rohrförmigen Hohlleiter nur TE- und TM- Wellen transportiert werden können.

   (a) Zeigen Sie, dass aus den Gleichungen (1 Pkt.)

$$\frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = \mathrm{i}\omega B_{0,z} \quad (1) \qquad \frac{\partial B_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_{0,z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_{0,z}}{\partial y} - \mathrm{i}kE_{0,y} = \mathrm{i}\omega B_{0,x} \quad (2) \qquad \frac{\partial B_{0,z}}{\partial y} - \mathrm{i}kB_{0,y} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_{0,x} \quad (5)$$

$$\mathrm{i}kE_{0,x} - \frac{\partial E_{0,z}}{\partial x} = \mathrm{i}\omega B_{0,y} \quad (3) \qquad \mathrm{i}kB_{0,x} - \frac{\partial B_{0,z}}{\partial x} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_{0,y} \quad (6)$$

   die Beziehungen $\omega = ck$, $-E_{0,y} = cB_{0,x}$ und $E_{0,x} = cB_{0,y}$ sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0,y}}{\partial y} &= 0 \quad \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial B_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0,y}}{\partial y} &= 0 \quad \frac{\partial B_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} = 0\,. \end{aligned} \quad (7)$$

   folgen.

   (b) Gleichungen (7) sind gerade die Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik bzw. Magnetostatik im leeren Raum, falls $\vec{E}_0 = \vec{E}_0(x,y)$ und $\vec{B}_0 = \vec{B}_0(x,y)$. Verwenden Sie die Methoden oder Ergebnisse der Statik im zylindersymmetrischen Fall, um die Gleichungen zu lösen. Zeigen Sie insbesondere, dass diese Lösungen in die Gleichungen (2 Pkt.)

$$\begin{aligned} \vec{E}(x,y,z,t) &= \vec{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \\ \vec{B}(x,y,z,t) &= \vec{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \end{aligned}$$

   eingesetzt in Zylinderkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{A}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\vec{e}_r \\ \vec{B} &= \frac{A}{cr}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\vec{e}_\phi \end{aligned} \quad (8)$$

   ergeben. Dabei ist $A$ eine Konstante.

   (c) Zeigen Sie direkt, dass die Gleichungen (8) die Maxwell-Gleichungen für das Vakuum und die Randbedingungen $\vec{E}^{\parallel} = 0$ und $\vec{B}^{\perp} = 0$ erfüllen. (1 Pkt.)

   (insgesamt 4 Pkt.)

**Lösung:**

(a) Mit $B_{0,z} = E_{0,z} = 0$ lauten die Beziehungen (1) bis (6)

$$\frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = 0 \quad (9) \qquad \frac{\partial B_{0,y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

$$-kE_{0,y} = \omega B_{0,x} \quad (10) \qquad kB_{0,y} = \frac{\omega}{c^2} E_{0,x} \quad (13)$$

$$kE_{0,x} = \omega B_{0,y} \quad (11) \qquad kB_{0,x} = -\frac{\omega}{c^2} E_{0,y}\,. \quad (14)$$

Aus (10) bzw. (14) folgern wir

$$E_{0,y} = -\frac{\omega}{k} B_{0,x} \qquad \text{und} \qquad E_{0,y} = -\frac{kc^2}{\omega} B_{0,x} \, .$$

Beide Beziehungen können nur dann gleichzeitig gelten, wenn $\omega^2 = k^2 \cdot c^2$, bzw. $\omega = k \cdot c$, falls $\omega > 0$, $k > 0$ und $c > 0$. Damit folgen sofort aus (10) und (13)

$$E_{0,y} = -cB_{0,x} \qquad \text{und} \qquad E_{0,x} = cB_{0,y} \, ,$$

bzw. durch Differenziation von (10) nach $y$ bzw. (13) nach $x$ erhält man weiter

$$\frac{\partial E_{0,y}}{\partial y} = -c \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial E_{0,x}}{\partial x} = c \frac{\partial B_{0,y}}{\partial x} \, .$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen liefert mit (12)

$$\frac{\partial E_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{0,y}}{\partial y} = c \left( \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} - \frac{\partial B_{0,x}}{\partial y} \right) = 0 \, .$$

Analog erhält man durch Differenziation von (10) nach $x$ und (13) nach $y$

$$\frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} = -c \frac{\partial B_{0,x}}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} = c \frac{\partial B_{0,y}}{\partial y} \, .$$

Subtraktion der beiden Gleichungen und Division durch $c$ ergibt mit (9)

$$\frac{\partial B_{0,x}}{\partial x} + \frac{\partial B_{0,y}}{\partial y} = \frac{1}{c} \left( \frac{\partial E_{0,x}}{\partial y} - \frac{\partial E_{0,y}}{\partial x} \right) = 0 \, .$$

(b) In der Statik gilt $\operatorname{rot} \vec{E}_0 = 0$ bzw. $\vec{E}_0 = -\operatorname{grad} \phi$. Wegen der Zylindersymmetrie ist $\vec{E}_0 = E_0(r)\vec{e}_r$ und das Potential hängt nur von $r$ ab, $\phi = \phi(r)$. Somit lautet die Laplace-Gleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right) = 0 \, .$$

Die Lösung dieser Gleichung

$$r \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \text{const.} = \tilde{A}$$

$$\phi(r) = \int \frac{\tilde{A}}{r'} \, \mathrm{d}r' = \tilde{A} \ln r + C$$

finden wir mit den Integrationskonstanten $\tilde{A}$ und $C$ durch zweimalige Integration. Elektrische Feld lauten darum

$$\vec{E}_0 = -\operatorname{grad} \phi = \left[ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} (\tilde{A} \ln r) + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}r} \right] \vec{e}_r = -\frac{\tilde{A}}{r} \vec{e}_r = \frac{A}{r} \vec{e}_r \, .$$

damit ergibt sich aus $E_{0,y} = -cB_{0,x}$ und $E_{0,x} = cB_{0,y}$ durch Umschreiben in kartesische Koordinaten

$$\vec{E}_0 = \frac{A}{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{B}_0 = \frac{A}{r} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

bzw. wieder in Zylinderkoordinaten

$$\vec{B}_0 = \frac{A}{c \cdot r} \cdot \vec{e}_\varphi \,.$$

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{E}(x,y,z,t) &= \vec{E}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\\ \vec{B}(x,y,z,t) &= \vec{B}_0(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\end{aligned}$$

ergeben sich sofort die Gleichungen (8).

(c) Die Gleichungen (8) erfüllen die Maxwell-Gleichungen, denn es gelten

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{E} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot E_r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right) = 0 \qquad \text{und}\\ \operatorname{div}\vec{B} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{A}{c \cdot r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right) = 0\,.\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{A}{r}\mathrm{i} \cdot k \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{A}{r}\mathrm{i} \cdot \omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \cdot \vec{e}_\varphi\,,$$

woraus mit $\frac{\omega}{c} = k$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

folgt, analog finden wir mit

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \begin{pmatrix} -\frac{A}{c \cdot r}\mathrm{i} \cdot k \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{A}{r}\mathrm{i} \cdot \omega \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} \cdot \vec{e}_r$$

die Gleichung

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \frac{k}{c \cdot \omega} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\,.$$

Aus (8) lesen wir unmittelbar $\vec{E}^{\parallel} = E_\varphi \vec{e}_\varphi + E_z \vec{e}_z = 0$ und $\vec{B}^{\perp} = B_r \vec{e}_r = 0$ ab.

2. **Liénard-Wiechert-Potentiale einer Punktladung.** Berechnen Sie die Liénard-Wiechert-Potentiale einer Punktladung $q$, die sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt und sich zur Zeit $t$ bei $\vec{w}(t) = \vec{v}t$ befindet. Zeigen Sie insbesondere, dass sich das skalare Potential als (4 Pkt.)

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}}$$

schreiben lässt. Dabei ist $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$ der Abstand zwischen dem Ort $\vec{r}$ und dem *momentanen* Aufenthaltsort der Ladung $q$ und $\theta$ der Winkel zwischen $\vec{R}$ und $\vec{v}$. Für nicht relativistische Geschwindigkeiten geht das Potential also in das Potential

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{v}t|}$$

über.

**Lösung:** Wir berechnen zunächst die retardierte Zeit $t_r$. Allgemein gilt

$$|\vec{r} - \vec{v}t_r| = \vec{v}t\,,$$

woraus durch Quadrieren

$$r^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{v}t_r + v^2 t_r^2 = c^2(t^2 - 2tt_r + t_r^2)$$

folgt. Diese quadratische Gleichung in $t_r$ hat die beiden Lösungen

$$t_r = \frac{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}) \pm \sqrt{(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v})^2 + (c^2 + v^2)(r^2 - c^2 t^2)}}{c^2 - v^2}\,. \tag{15}$$

Physikalich interessant ist nur eine dieser beiden Lösungen. Welche das ist, erkennt man duch Analyse des Grenzfalls $v = 0$, in dem die Ladung bewegungslos im Koordinatenursprung liegt. Hier gilt

$$t_r = t \pm \frac{r}{c}\,,$$

da immer $t_r \leq t$ gilt, muss die Lösung mit dem negativen Vorzeichen, die physikalisch relevante sein.

Für den Abstand $\vec{R}_r$ zwischen retardiertem Ort $\vec{v}t_r$ und dem Ortsvektor $\vec{r}$

$$\vec{R}_r = \vec{r} - \vec{v}t_r$$

gelten

$$R_r = c(t - t_r) \qquad \text{und} \qquad \frac{\vec{R}_r}{R_r} = \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{c(t - t_r)}\,.$$

Für den Ausdruck $R_r - \vec{R}_r \cdot \vec{v}/c$ finden wir somit

$$R_r - \vec{R}_r \cdot \frac{\vec{v}}{c} = R_r \left(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{R}_r}{R_r}\right) = c(t - t_r)\left(1 - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{v}t_r}{c(t - t_r)}\right)$$
$$= c(t - t_r) - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} + \frac{v^2 t_r}{c} = \frac{1}{c}[(c^2 t - \vec{r} \cdot \vec{v}) - (c^2 - v^2)t_r]\,.$$

Setzen wir hierin noch die Lösung (15) mit dem negativen Vorzeichen ein, so folgt

$$R_r - \vec{R}_r \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{(c^2t - \vec{r}\cdot\vec{v})^2 + (c^2+v^2)(r^2-c^2t^2)}\,.$$

Die retardierten Potentiale lauten somit

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_r - \vec{R}_r\cdot\frac{\vec{v}}{c}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qc}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2+v^2)(r^2-c^2t^2)}} \tag{16}$$

und

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}}{R_r - \vec{R}_r\cdot\frac{\vec{v}}{c}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qc\vec{v}}{\sqrt{(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2+v^2)(r^2-c^2t^2)}} \tag{17}$$

Das skalare Potential (16) lässt sich auch als

$$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta}} \tag{18}$$

schreiben. Denn es folgt zunächst duch Ausmultiplizieren und Sortieren

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2}\left[(c^2t-\vec{r}\cdot\vec{v})^2+(c^2+v^2)(r^2-c^2t^2)\right]\\
&= r^2 - \vec{r}\cdot\vec{v}t + v^2t^2 - \frac{r^2v^2}{c^2} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})^2}{c^2}\\
&= r^2 - \vec{r}\cdot\vec{v}t + v^2t^2 - \frac{r^2v^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}v^2t + v^4t^2}{c^2} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v})^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}v^2t + v^4t^2}{c^2}\\
&= r^2 - \vec{r}\cdot\vec{v}t + v^2t^2 - \frac{v^2(r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{v}t + v^2t^2)}{c^2} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{v} - v^2t)^2}{c^2}
\end{aligned}$$

mit dem Distanzvektor $\vec{R} = \vec{r} - \vec{v}t$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
&= R^2 - \frac{v^2R^2}{c^2} + \frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{c^2}\\
&= R^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{R^2v^2}\right) = R^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{(\vec{R}\cdot\vec{v})^2}{R^2v^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

und mit dem Kosinus $\cos\theta = \frac{\vec{R}\cdot\vec{v}}{Rv}$ zwischen $\vec{R}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ erhalten wir schließlich

$$= R^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\left(1-\cos^2\theta\right)\right) = R^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)\,.$$

Aus (16) folgt damit unmittelbar das Potential (18).

3. **TE$_{00}$-Mode.** Zeigen Sie, dass es in einem rechteckigen Wellenleiter keine TE$_{00}$-Lösung gibt. (3 Pkt.)
   Hinweis: Beachten Sie, daß in diesem Fall Gleichung (18.5) aus der Vorlesung nicht gilt. (Wieso nicht?)

**Lösung:** In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir die Gleichungen (18.4) lösen müssen, um Bedingungen an TE- Moden zu bestimmen. Die Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \mathrm{i}\omega B_z \qquad (18.4.\mathrm{i}) \qquad\qquad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = -\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_z \qquad (18.4.\mathrm{iv})$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \mathrm{i}k\omega E_y = \mathrm{i}\omega B_x \qquad (18.4.\mathrm{ii}) \qquad\qquad \frac{\partial B_z}{\partial y} - \mathrm{i}k B_y = \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_x \qquad (18.4.\mathrm{v})$$

$$\mathrm{i}k E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mathrm{i}\omega B_y \qquad (18.4.\mathrm{iii}) \qquad\qquad \mathrm{i}k B_x - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\mathrm{i}\omega}{c^2} E_y \qquad (18.4.\mathrm{vi})$$

In der Vorlesung haben wir unter der Annahme, dass $\omega \neq ck$ gilt, die Gleichungen zu

$$E_x = \mathrm{i}\frac{k\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\frac{\partial B_z}{\partial y}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \qquad (18.5.\mathrm{i}) \qquad\qquad B_x = \mathrm{i}\frac{k\frac{\partial B_z}{\partial x} - \omega\frac{\partial E_z}{\partial y}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \qquad (18.5.\mathrm{iii})$$

$$E_y = \mathrm{i}\frac{k\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\frac{\partial B_z}{\partial x}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \qquad (18.5.\mathrm{ii}) \qquad\qquad B_y = \mathrm{i}\frac{k\frac{\partial B_z}{\partial y} + \omega\frac{\partial E_z}{\partial x}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2} \qquad (18.5.\mathrm{vi})$$

umgeformt und nur die transversalen in Abhängigkeit von den longitudinalen Feldkomponenten $E_z$ und $B_z$ dargestellt. Als Lösung für eine TE$_{m,n}$- Mode erhalten wir die Dispersionsrelation

$$k = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]}\,.$$

Für $m = n = 0$ ergibt sich daraus aber $\omega = ck$, was die Umformung zu (18.5) ungültig macht (Nenner wird Null). Deshalb müssen wir zu (18.4) zurück gehen und ausgehend von diesen Gleichungen beweisen, dass eine T$_{00}$-Mode nicht möglich ist. Zunächst folgern wir aus $E_z = 0$

$$E_y \overset{(18.4.\mathrm{ii})}{=} -\frac{\omega}{k} B_x = -cB_x \quad \text{und} \quad E_x \overset{(18.4.\mathrm{iii})}{=} \frac{\omega}{k} B_y = cB_y\,.$$

Mit diesen beiden Gleichungen erhalten wir sofort

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} \overset{(18.4.\mathrm{v})}{=} \mathrm{i}\left(kB_y - \frac{\omega}{c^2}(cB_y)\right) = 0 \qquad \text{und}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} \overset{(18.4.\mathrm{vi})}{=} \mathrm{i}\left(kB_x + \frac{\omega}{c^2}(-cB_x)\right) = 0\,.$$

Damit muss $B_z = B_z(x, y)$ also konstant sein. Wenden wir nun das Faraday'sche Induktionsgesetz auf den Querschnitt des Wellenleiters an, zeigt sich wegen unseres Ansatzes ebener Wellen ($\dot{\vec{B}} = \mathrm{i}\omega\vec{B}$) und $B_z = \mathrm{const}$

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{i}\omega \int \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{i}\omega e^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} B_z(ab)\,.$$

Wählen wir die Berandung dieser Fläche in die Leiteroberfläche hinein, so gilt bei einem (perfekten) Leiter $\vec{E} = 0$. Damit verschwindet das Integral auf der linken Seite und somit muss $B_z = 0$ gelten. Damit würde es sich um eine TEM- Mode handeln. Wie wir aber in der Vorlesung gesehen haben, kann in einem leeren Hohlleiter keine TEM-Mode existieren.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 24 06. 2009.