1. **Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen.** Eine transversale elektromagnetische Welle in einem nicht leitenden, ungeladenen Medium sei (4 Pkt.)

   - linear polarisiert, $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin[k(z - ct)]$ bzw.
   - zirkular polarisert, $\vec{E} = \vec{E}_0 \left\{\cos[k(z - ct)]\, \vec{e}_x + \sin[k(z - tc)]\, \vec{e}_y\right\}$.

   In welche Richtung breitet sich die Welle aus? Berechnen Sie

   (a) die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$,

   (b) den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$,

   (c) den Strahlungsdruck auf eine um den Winkel ϑ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte total absorbierende Ebene.

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung: Die Wellen breiten sich offensichtlich beide z-Richtung aus.

(a) Wir setzen im Folgenden $\omega = ck$. Die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$ kann bei bekanntem $\vec{E}(\vec{r}, t)$ aus

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

berechnet werden.

- Im Falle der linear polarisierten Welle erhält man

$$\nabla \times \vec{E} = k(-E_{0y}, E_{0x}, 0)\cos(kz - \omega t) = \dot{\vec{B}}\,.$$

Nach Integration über die Zeit t ist die magnetische Induktion somit

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}(-E_{0y}, E_{0x}, 0)\sin(kz - \omega t) = \frac{1}{\omega} \cdot (\vec{k} \times \vec{E})\,.$$

- Für die zirkular polarisierte Welle folgt analog

$$\nabla \times \vec{E} = E_0 k(\cos(kz - \omega t), \sin(kz - \omega t, 0)\,,$$

woraus sich die magnetiche Induktion wieder aus der Integration über die Zeit ergibt.

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega}\left(-E_y, E_x, 0\right) = \frac{1}{\omega}\left(\vec{k} \times \vec{E}\right)$$

(b) Der Poyinting-Vektor bestimmt sich aus

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_r \mu_0} \vec{E} \times \vec{B}\,.$$

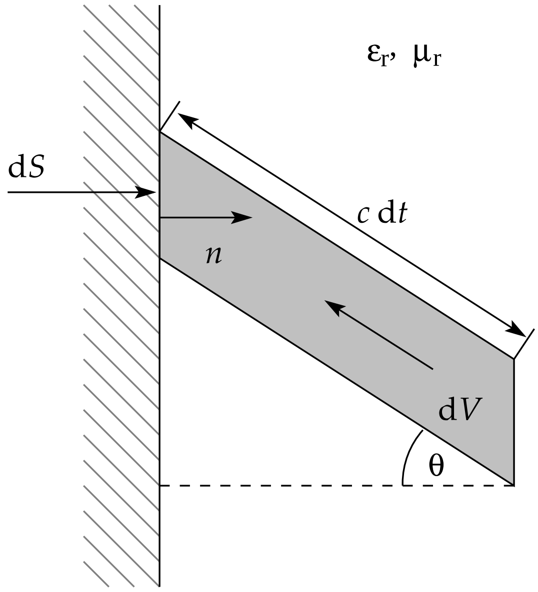
- Mit dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe findet man für die linear polarisierte Welle

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_r \mu_0 \omega} \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu_r \mu_0 \omega}\left(\vec{k}\vec{E}^2 - \vec{E}\,\underbrace{(\vec{E} \cdot \vec{k})}_{=0}\right) = \frac{1}{c\mu_r \mu_0} E_0^2 \vec{e}_z\,.$$

- Der Poynting-Vektor der zirkular polarisierten Welle ist

$$\vec{S}(\vec{r},t) = \sqrt{\frac{\varepsilon_r \varepsilon_0}{\mu_r \mu_0}} E_0^2 \, \vec{e}_z \, .$$

(c) Die Berechnung des Strahlungsdrucks soll durch die abgebildete Skizze verdeutlicht werden. Der Strahlungsdruck entspricht einem Impulsübertrag auf eine Fläche und ist des Weiteren gleich der Normalkomponente $\vec{n} \cdot \vec{F}$ der auf die Ebene ausgeübten Kraft $\vec{F}$ pro Fläche. Die Dichte des Feldimpulses



$$\vec{p}_{\text{Feld}} = \vec{D} \times \vec{B} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \vec{S} = \frac{1}{c^2} \vec{S} \, ,$$

wobei c die Phasengeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle ist. Alle Wellenfronten in dem schiefen Zylinder, dessen Volumen

$$\Delta V = c \, \mathrm{d}t \, \cos\theta \, \mathrm{d}S$$

beträgt, erreichen in der Zeit $\mathrm{d}t$ das Flächenelement $\mathrm{d}S$. Die Ebene sei total absorbierend, d. h., der Feldimpuls, der auf die Fläche $\mathrm{d}S$ in der Zeit $\mathrm{d}t$ übertragen wird, ist gleich $\vec{p}_{\text{Feld}} \Delta V$. Die auf die Fläche wirkende Kraft ist gleich dem Impulsübertrag pro Zeit.

$$\vec{F} = \vec{p}_{\text{Feld}} c \cos\theta \, \mathrm{d}S \, .$$

Der Strahlungsdruck ist somit

$$p_s = \frac{\vec{n} \cdot \vec{F}}{\mathrm{d}t} = c \cos\theta \, \vec{n} \cdot \vec{p}_{\text{Feld}} = \frac{\cos\theta}{c} \vec{n} \cdot \vec{S} = \frac{1}{c} |\vec{S}| \cos^2\theta = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2\theta \, .$$

2. **Stehende Wellen.** Gegeben seien zwei parallele, unendlich große und perfekt leitende Metallplatten mit dem Abstand L. Sie seien parallel zur x-y-Ebene.

   Zwischen diesen Platten befinde sich eine stehende elektromagnetische Welle, die sich als Summe einer in positiver und einer in negativer z-Richtung laufenden ebenen Welle darstellen lässt:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left(\vec{E}_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz - \omega t)} + \vec{E}_2 \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz + \omega t)} \right) \, .$$

   (a) Welche Bedingungen folgen für $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ und k aus den Übergangsbedingungen des $\vec{E}$-Feldes an den Metallplatten? (1 Pkt.)

   (b) Berechnen Sie das zugehörige Magnetfeld in einer zum $\vec{E}$-Feld analogen Form. (1 Pkt.)

   (c) Skizzieren Sie $\vec{E}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}(\vec{r},t)$ für $\vec{E}_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}} E_0 \, \vec{e}_y$, $E_0 \in \mathbb{R}$. (1 Pkt.)

(d) Berechnen Sie für dieses $\vec{E}_1$ den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor (1 Pkt.)

$$\langle \vec{S}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{r}, t)\, \mathrm{d}t\,.$$

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) An den Leiteroberflächen müssen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes verschwinden. Aus $\vec{E}(x, y, 0, t) \cdot \vec{e}_x = 0$ folgt

$$\Re\left(E_{1,x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega t)} + E_{2,x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t)}\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad E_{1,x} + E_{2,x} = 0\,.$$

Analog gilt wegen $\vec{E}(x, y, 0, t) \cdot \vec{e}_y = 0$

$$\Re\left(E_{1,y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\omega t)} + E_{2,y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t)}\right) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad E_{1,y} + E_{2,y} = 0\,.$$

Das sich die stehende Welle aus zwei sich in z-Richtung ausbreitende ebenen Wellen zusammensetzt, muss außerdem $E_{1,z} = E_{2,z} = 0$ gelten. Insgesamt haben wir also die Bedingung $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$ zu stellen und das elektrische Feld verschwindet auf der Leiteroberfläche bei $z = 0$.

Genauso muss auch bei $z = L$ das elektrische Feld verschwinden, daraus folgt

$$\begin{aligned}
\Re\left(\vec{E}_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kL-\omega t)} - \vec{E}_1 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kL+\omega t)}\right) &= 0 \\
\Re\left[\vec{E}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}\right)\right] &= 0 \\
\Re\left(2\vec{E}_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\sin(kL)\right) &= 0
\end{aligned}$$

Diese Bedingung kann nur für

$$kL = \pi n \qquad \text{bzw.} \qquad k = \frac{\pi n}{L} \qquad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

erfüllt werden

(b) Aus der Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

folgt

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \Re\left[\begin{pmatrix} -E_{1,y}\mathrm{i}k \\ E_{1,x}\mathrm{i}k \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + \begin{pmatrix} -E_{1,y}\mathrm{i}k \\ E_{1,x}\mathrm{i}k \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}\right] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

bzw. nach Inegration über t

$$\vec{B} = \Re\left[\frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} -E_{1,y}k \\ E_{1,x}k \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + \frac{1}{\omega}\begin{pmatrix} -E_{1,y}k \\ E_{1,x}k \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}\right]$$

$$\vec{B} = \Re\left[\frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E}_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)} + \frac{1}{\omega}(\vec{k}\times\vec{E}_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(kz+\omega t)}\right]$$

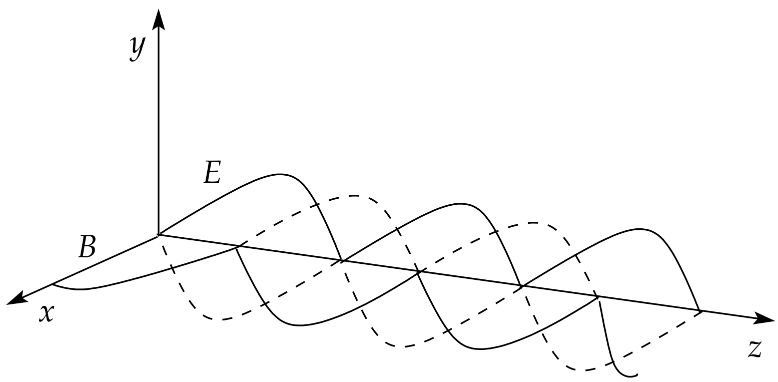
Durch Umformen erhält man weiter

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \Re\left[2\mathrm{i}\cdot\vec{E}_1\left(\sin(kz)\cdot\cos(\omega t) - \mathrm{i}\cdot\sin(kz)\cdot\sin(\omega t)\right)\right]$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \Re\left[\frac{2}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_1\left(\cos(kz)\cdot\cos(\omega t) - \mathrm{i}\cdot\cos(kz)\cdot\sin(\omega t)\right)\right].$$

(c) Für $\vec{E}_1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}E_0\cdot\vec{e}_y$, $E_0 \in \mathbb{R}$ ergibt sich für die elektrische bzw. magnetische Feldkomponente der stehenden Welle

$$\vec{E} = E_0\cdot\sin(kz)\cdot\cos(\omega t)\cdot\vec{e}_y$$
$$\vec{B} = \frac{E_0}{\omega}\cos(kz)\cdot\sin(\omega t)\cdot\vec{e}_x\,.$$



(d) Der Poynting-Vektor beträgt

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{\mu_0}(\vec{E}\times\vec{B}) \\ &= \frac{E_0^2}{\omega}\cdot\sin(kz)\cdot\cos(\omega t)\cdot\cos(kz)\cdot\sin(\omega t)\cdot\vec{e}_y\times\vec{e}_x \\ &= -\frac{E_0^2}{4\omega}\left[\sin^2(kz+\omega t) - \sin^2(kz-\omega t)\right]\cdot\vec{e}_z \\ &= \frac{E_0^2}{8\omega}\left[\cos(2\omega t+2kz) - \cos(2\omega t-2kz)\right]\cdot\vec{e}_z\end{aligned}$$

Da $\vec{S}$ die halbe Periode der elektromagnetischen Welle hat und $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ist, folgt für den über eine Schwingungsperiode gemittelten Poynting-Vektor

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}\,\mathrm{d}t = 0\,.$$

Im zeitlichen Mittel findet zwischen den Metallplatten durch die stehende Welle also kein Energietransport statt.

3. **Elektronengas.** Eine elektromagnetische Welle breite sich in einem leitenden Medium ($\sigma \neq 0$) aus.
   (a) Finden Sie das Dispersionsgesetz, d.h. den Zusammenhang zwischen der Wellenzahl k und der Kreisfrequenz ω der ebenen Welle in der Form (1 Pkt.)

   $$k^2 = f(\omega)$$

   (b) In einem Elektronengas mit der Teilchendichte n_0 betrachte man die Bewegung der Elektronen in dem Feld $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ unter Vernachlässigung von Kollisionen und der vom Magnetfeld auf das Elektron ausgeübten Lorentz-Kraft. Berechnen Sie die Leitfähigkeit σ des Elektronengases. (1 Pkt.)

   (c) Berechnen Sie die kritische Frequenz ω_p für die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle im Elektronengas$\big(k^2(\omega = \omega_p) = 0\big)$ sowie die Eindringtiefe für eine niederfrequente Welle ($\omega << \omega_p$) (1 Pkt.)

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

(a) Telegraphengleichung:

$$\left[\left(\Delta - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_r\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r},t) &\sim e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \\ \rightarrow \quad -k^2 + \tfrac{1}{u^2}\omega^2 + i\mu_r\mu_0\sigma\omega &= 0 \\ \rightarrow \quad k^2 &= \tfrac{\omega^2}{u^2} + i\mu_r\mu_0\sigma\omega. \end{aligned}$$

(b) Einzelnes Elektron: Masse m, Ladung $-e$
Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} m\dot{\vec{v}} &= -e\vec{E}_0 e^{-i\omega t} \\ \rightarrow m\vec{v}(t) &= \frac{e\vec{E}_0}{i\omega} e^{-i\omega t} + const. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die Stromdichte zu:

$$\vec{j} = -en_0\vec{v} = \frac{ie^2 n_0}{m\omega}\vec{E} + const.$$

Ohm'sches Gesetz:

$$\vec{j} = 0 \text{ für } \vec{E} = 0 \rightarrow const = 0.$$

$$\vec{j} = i\frac{e^2 n_0}{m\omega}\vec{E} \rightarrow \sigma = i\frac{e^2 n_0}{m\omega}.$$

(c) σ imaginär, da E komplex angesetzt wurde:

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{\omega^2}{u^2} - \frac{\mu_r\mu_0 e^2 n_0}{m}, \\
k^2(\omega_p) &\overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow \omega_p^2 \mu_r\mu_0\epsilon_r\epsilon_0 - \frac{\mu_r\mu_0 e^2 n_0}{m} = 0 \\
\Rightarrow \omega_p^2 &= \frac{n_0 e^2}{\epsilon_r\epsilon_0 m}. \\
& k^2 \geq 0 \text{für} \omega \geq \omega_p, \omega << \omega_p \Rightarrow k^2 \approx -\mu_r\mu_0\frac{e^2 n_0}{m} = (i < \vec{k} >)^2 \\
\Rightarrow < k >^2 &= \mu_r\mu_0\frac{e^2 n_0}{m} \\
\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}, t) &\sim e^{i < k > z - i\omega t} \qquad (\vec{k}||z - \text{Achse}).
\end{aligned}$$

Eindringtiefe $< k > \delta = 1$:

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{m}{\mu_r\mu_0 e^2 n_0}} = \frac{u}{\omega_p}$$

u : Wellengeschwindigkeit im Elektronengas.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 17 06. 2009.