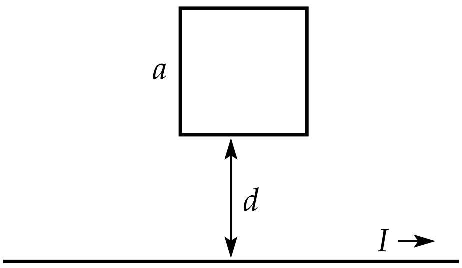
1. **Induktion.** Eine quadratische Leiterschleife (Seitenlänge a) liegt im Abstand d auf einem Tisch parallel zu einem sehr langen Leiter, der den Strom I führt.



(a) Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife. (1 Pkt.)

(b) Wie groß ist die in der Leiterschleife induzierte Spannung, wenn sie mit konstanter Geschwindigkeit v vom geraden Leiter weggezogen wird? In welche Richtung fließt der induzierte Strom, im oder gegen den Uhrzeigersinn? (2 Pkt.)

(c) Was passiert, wenn die Leiterschleife mit der Geschwindigkeit v parallel zum Leiter bewegt wird? (1 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Das Magnetfeld eines unendlich langen vom Strom I durchflossenen Leiters beträgt

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \vec{e}_\varphi \,.$$

Da $\vec{B}(r)$ unter Verschiebungen in $\vec{z}$-Richtung invariant ist, gilt für den magnetischen Fluss durch die Leiterschleife

$$\begin{aligned}\Psi &= \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{f} = \int_0^a \int_d^{d+a} |\vec{B}| \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z \\ &= \int_d^{d+a} \int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}z = \frac{Ia\mu_0}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Ia\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a+d}{d} \,.\end{aligned}$$

(b) Jetzt wächst der Abstand linear mit der Zeit an, $d = d(t) = d_0 + vt$ mit $\dot{d} = v$. Die induzierte Spannung beträgt

$$\begin{aligned}U_{\text{ind}}(t) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} v \\ &= -\frac{Ia\mu_0 v}{2\pi} \left(\frac{1}{a + d(t)} - \frac{1}{d(t)} \right) = \frac{I\mu_0 v}{2\pi} \frac{a^2}{(a + vt + d_0)(vt + d_0)}\end{aligned}$$

Da die induzierte Spannung $U_{\text{ind}} > 0$ ist, fließt der Strom im mathematisch positiven Sinn, denn $U_{\text{ind}} = \int_{\partial A} \vec{E} \,\mathrm{d}\vec{r}$.

(c) Wenn die Leiterschleife parallel zum Leiter bewegt wird, ist der magnetische Fluss durch die Leiterschleife konstant, trotzdem wird in der Leiterschleife eine Spannung induziert. Auf ein Leitungselektron im zum unendlich langen Draht senkrechten Teilstück wirkt die Lorentz-Kraft $F_{\text{L}} = -evB(r)$. Diese Kraft wirkt senkrecht zu Bewegungsrichtung und der Ebene der Leiterschleife, und erzeugt eine Ladungstrennung zwischen oberem und unterem Drahtabschnitt. Die in einer Scheife induzierte Spannung beträgt

$$U_{\text{ind}} = \oint \vec{v} \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \,.$$

Für die Leiterschleife erhalten wir damit

$$\begin{aligned} U_{\text{ind}} &= \int_d^{d+a} v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r + v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d+a} + \int_{d+a}^{d} v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{r}\,\mathrm{d}r + v\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d} \\ &= \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d+a}{a} + \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d+a} - \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{d+a}{a} + \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{d} \\ &= \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{d+a} + \frac{1}{d}\right). \end{aligned}$$

2. **Magnetisches Dipolmoment einer Kreisscheibe.** Eine homogen mit der Gesamtladung Q geladene Kreisscheibe mit Radius R und Masse M liegt in der x-y-Ebenen, so dass ihre Symmetrieachse mit der z-Achse des Koordinatensystems übereinstimmt, und rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse.
   (a) Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment $\vec{m}$ der Kreisscheibe. (2 Pkt.)
   (b) Geben Sie das gyromagnetische Verhältnis γ der Kreisscheibe an. (2 Pkt.)

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Die Kreisscheibe trägt eine Oberflächenladungsdichte von $\sigma = Q/(\pi R^2)$. Wir zerlegen die Kreisscheibe in dünne Kreisringe mit Radius r. Jeder dieser Kreisringe trägt eine Ladung $\mathrm{d}q = 2\pi\, r\, \sigma\, \mathrm{d}r$ bzw. den Strom $\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\pi\, r\,\sigma\,\mathrm{d}r$. Das Dipolmoment eines Kreisringes ist darum

$$\mathrm{d}\vec{m} = \vec{e}_z \cdot \pi r^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi}\cdot 2\pi\, r\,\sigma\,\mathrm{d}r = \vec{e}_z \pi\omega\sigma r^3\,\mathrm{d}r\,.$$

Das magnetische Dipolmoment der ganzen Kreisscheibe ergibt sich durch Integration über den Radius.

$$\vec{m} = \int_0^R \vec{e}_z \pi\omega\sigma r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\omega\sigma R^4}{4}\vec{e}_z = \frac{\omega Q R^2}{4}\vec{e}_z$$

(b) Mit der Flächenmassendichte $\varrho = M/(\pi R^2)$ beträgt der Drehimpuls der Kreisscheibe

$$\vec{L} = \vec{e}_z\omega J = \vec{e}_z\omega\int_0^R r^2\cdot 2\pi r\varrho\,\mathrm{d}r = \frac{\omega\varrho\pi R^4}{2}\vec{e}_z = \frac{\omega M R^2}{2}\vec{e}_z\,.$$

Das gyromagnetische Verhältnis γ ergibt sich somit zu $\gamma = |\vec{m}|/|\vec{L}| = Q/(2M)$.

3. **Abgebremste rotierende Hohlkugel.** Auf der Oberfläche einer Hohlkugel mit dem Radius R sei eine Ladung q gleichmäßig verteilt. Sie rotiere zunächst mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0 um einen ihrer Durchmesser. Von $t = 0$ an werde sie gemäß

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\gamma t} \qquad (\gamma > 0)$$

abgebremst.

   (a) Welches elektrische Feld wird dabei in der quasistationären Näherung ($\dot{D} \approx 0$) im Außenraum ($r > R$) induziert? (1 Pkt.)

(b) Unter welchen Bedingungen kann es gegenüber dem elektrostatischen Feld ($t < 0$) vernachlässigt werden? (1 Pkt.)

(c) Welche Energie wird pro Zeiteinheit und insgesamt während des Bremsvorganges abgegeben? (1 Pkt.)

(insgesamt 3 Pkt.)

Lösung:

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 20. 05. 2009.