1. **Rechnen mit Nabla.** Zeigen Sie durch Auswertung in kartesischen Koordinaten die folgende Relation und werten Sie die anderen Relationen analog dazu aus. (4 Pkt.)

$$\nabla \circ \left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \vec{W} \circ \left(\nabla \times \vec{V}\right) - \vec{V} \circ \left(\nabla \times \vec{W}\right)$$

- $\nabla \times \left(\Phi \cdot \vec{V}\right)$
- $\nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{W}\right)$
- $\nabla \left(\vec{V} \circ \vec{W}\right)$

Lösung: Das Kreuzprodukt kann wie folgt geschrieben werden:

$$\left(\vec{V} \times \vec{W}\right)_i = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{ikl} V_k W_l$$

In kartesischen Komponenten erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}
\nabla \circ \left(\vec{V} \times \vec{W}\right) &= \textstyle\sum_{i,j,k} \partial_i \left(\epsilon_{ijk} V_j W_k\right) \\
&= \textstyle\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \left(W_k \partial_i V_j + V j \partial_i W_k\right) \\
&= \vec{W} \circ \left(\nabla \times \vec{V}\right) - \vec{V} \circ \left(\nabla \times \vec{W}\right)
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\Phi \cdot \vec{V}\right)_i &= \textstyle\sum_{jk} \epsilon_{ijk} \partial_j \left(\Phi V_k\right) \\
&= \textstyle\sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \left(\Phi \partial_j V_k + V_k \partial_j \Phi\right) \\
&= \Phi \left(\nabla \times \vec{V}\right)_i - \left(\vec{V} \times \nabla \Phi\right)_i
\end{aligned}$$

In der folgenden Aufgabe verweden wir die Kontraktion zweier total antisymmetrischer Tensoren:$\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

$$\begin{aligned}
\nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{W}\right) &= \textstyle\sum_{j,k,l,m} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} \partial_j \left(\vec{V}\vec{W}\right) \\
&= \textstyle\sum_{j,k,l,m} \left(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\right) \left(W_m \partial_j V_l + V_l \partial_j W_m\right) \\
&= \textstyle\sum_j \left(W_j \partial_j V_i + V_i \partial_j W_j - W_i \partial_j V_j - V_j \partial_j W_i\right) \\
&= \left[\left(\vec{W} \cdot \nabla\right) \vec{V} - \vec{W} \left(\nabla \cdot \vec{V}\right) + \vec{V} \left(\nabla \cdot \vec{W}\right) - \left(\vec{V} \cdot \nabla\right) \vec{W}\right]_i
\end{aligned}$$

Die Auswertung von $\nabla\left(\vec{V}\circ\vec{W}\right)$ erfolgt nach der Produktregel

$$\nabla\left(\vec{V}\circ\vec{W}\right)_i = \sum_j \partial_i\left(V_j W_j\right) = \sum_j \left[V_j\left(\partial_i W_j\right) + W_j\left(\partial_i V_j\right)\right]$$

2. **Die Vektorfläche.** Der Vektor

$$\vec{a} = \int\limits_S \mathrm{d}\vec{f}$$

wird manchmal auch Vektorfläche einer beliebigen Oberfläche genannt. Man sieht leicht, dass sein Betrag für nicht gekrümmte Flächen dem Flächeninhalt entspricht.

(a) Berechnen Sie die Vektorfläche einer Halbkugelschale ohne Boden. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{a} = \vec{0}$, falls es sich um eine geschlossene Oberfläche handelt. (1 Pkt.)

(c) Beweisen Sie, dass $\vec{a}$ für alle Oberflächen mit gleichem Rand ∂S identisch ist. (1 Pkt.)

(d) Zeigen Sie für das geschlossene Wegintegral über den Rand der Oberfläche (1 Pkt.)

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial S} \vec{r}\times \mathrm{d}\vec{l}\,.$$

Hinweis: Zeichnen Sie einen Kegel vom Rand der Oberfläche zum Koordinatenursprung. Zerlegen Sie dessen Oberfläche in infinitesimale Dreiecke von der Spitze zum Rand und nutzen Sie die Eigenschaft des Kreuzproduktes.

(insgesamt 4 Pkt.)

Lösung:

(a) Der Flächennormalenvektor lautet

$$\mathrm{d}\vec{f} = R^2\sin(\vartheta)\vec{e}_r\,.$$

Setzt man hier die Transformationsgleichungen zwischen karthesischen und Kugelkoordinaten ein, erhält man

$$\vec{e}_r = \sin(\vartheta)\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\vartheta)\sin(\varphi)\vec{e}_y + \cos(\vartheta)\vec{e}_z\,.$$

Damit ergeben sich folgende Integrale:

$$\vec{a}_x = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2(\vartheta)\cos(\varphi)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

$$\vec{a}_y = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin^2(\vartheta)\sin(\varphi)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

$$\vec{a}_z = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$$

Wie man schnell durch Ausführen der Integration über φ feststellt, verschwinden die ersten beiden Integrale. Im dritten Integral kann man leicht die Integration über ϑ ausführen, indem man feststellt, dass der Integrand die Form $\mathrm{f}(\vartheta) \cdot \mathrm{f}'(\vartheta)$ hat.
Es ergibt sich

$$\vec{a} = \pi R^2 \vec{e}_z.$$

(b) Wir betrachten den Gauß'schen Integralsatz für das Volumen V und dessen geschlossene Oberfläche S.

$$\int\limits_V \nabla \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}V = \int\limits_{S(V)} \vec{F} \, \mathrm{d}\vec{f}$$

Wählen wir $\vec{F} = \vec{c}p$ mit einem konstanten Vektor $\vec{c}$, so ergibt sich mit der Umformung

$$\nabla(\vec{c}p) = p \, \nabla\vec{c} + \vec{c} \, \nabla p = \vec{c} \, \nabla p$$

der Gaußsche Satz zu

$$\vec{c} \int\limits_V \nabla p \mathrm{d}V = \vec{c} \int\limits_{S(V)} p \cdot \mathrm{d}\vec{f}.$$

Damit erhalten wir

$$\int\limits_V \nabla p \mathrm{d}V = \int\limits_{S(V)} p \cdot \mathrm{d}\vec{f}.$$

Setzen wir hier nun $p = 1$ so folgt die Behauptung.

$$\int\limits_V \vec{0} \mathrm{d}V = \vec{0} = \int\limits_{S(V)} 1 \cdot \mathrm{d}\vec{f} = \int\limits_{S(V)} \mathrm{d}\vec{f} = \vec{a}.$$

(c) Man stelle sich zwei nicht geschlossene Flächen mit demselben Rand vor. Nehmen wir an, die Vektorflächen der beiden Flächen wären verschieden. Setzen wir die beiden Flächen zu einer geschlossenen Fläche zusammen, muss deren Vektorfläche nach (b) gleich Null sein.

$$0 = \int\limits_S \mathrm{d}\vec{f} = \int\limits_{S_1} \mathrm{d}\vec{f} - \int\limits_{S_2} \mathrm{d}\vec{f} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2$$

Mit unserer Annahme, dass die beiden Flächenvektoren verschieden sind, wäre diese Gleichung falsch, woraus folgt, dass die Annahme $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$ falsch ist.

(d) Da nach (c) Flächen mit gleichem Rand die gleiche Vektorfläche haben, können wir auch eine beliebige Fläche wählen um die Vektorfläche zu einem gegebenen Rand zu berechnen. Wir wählen nun einen Kegel, dessen Spitze im Nullpunkt liegt und dessen Bodenfläche vom gegebenen Rand begrenzt wird. Wir drücken nun den Flächennormalenvektor $d\vec{f}$ durch das Kreuzprodukt von $\vec{r}$ und dem Tangentialvektor $d\vec{l}$ aus.

$$d\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{l})$$

Dabei nutzen wir aus, dass der sich aus dem Kreuzprodukt ergebende Vektor senkrecht auf den beiden Vektoren steht und sein Betrag gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms ist. Integration über den gesamten Rand liefert dann die Vektorfläche.

3. **Poisson Gleichung.** Lösen Sie die Gleichung: (3 Pkt.)

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) && \vec{r} \in V \\
\Phi(\vec{r}) &= \sigma(\vec{r}) && \vec{r} \in S(V) \qquad \text{(Randbedingung)} \\
\Delta F(\vec{r}) &= 0 && \vec{r} \in V \qquad \text{(homogene Lösung)}
\end{aligned}$$

Hierbei ist $S(V)$ die Oberfläche des Volumens V.
Hinweis: Führen Sie $G' = G + F$, mit G - Greensche Funktion des Laplaceoperators ein. Stellen Sie $\Phi(\vec{r})$ als Integral über eine δ-Fkt dar. Nutzen sie die Beziehung $\Delta G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$. Wenden Sie den 2.Greenschen Satz an um zu einer Integraldarstellung von Φ zu gelangen.

Lösung: Wir führen ein

$$\hat{G} = G + F$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \int_V \Phi(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')dV' \\
&= \int_V \Phi(\vec{r}')\Delta'\hat{G}(\vec{r},\vec{r}')dV' \\
&\overset{2.Green}{=} \int_V \hat{G}(\vec{r},\vec{r}')\Delta'\Phi(\vec{r}')dV' \quad + \int_{S(V)} \left[\Phi(\vec{r}')\nabla'\hat{G}(\vec{r},\vec{r}') - \hat{G}(\vec{r},\vec{r}')\nabla\Phi\right] d\vec{f}' \\
&= \int_V \hat{G}(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}') \quad + \int_{S(V)} \left[\Phi(\vec{r}')\nabla'\hat{G}(\vec{r},\vec{r}') - \hat{G}(\vec{r},\vec{r}')\nabla\Phi\right] d\vec{f}' \\
&= \int_V \hat{G}(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}') \quad + \int_{S(V)} \sigma(\vec{r}')\nabla'\hat{G}(\vec{r},\vec{r}')d\vec{f}'
\end{aligned}$$

F ist nicht eindeutig festgelegt und kann somit so gewählt werden, dass die Greensfunktion auf dem Rand verschwindet:$\hat{G}(\vec{r},\vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in S$, womit das hintere Integral Null wird(letzter Umformungsschritt) und $\Phi(\vec{r})$ durch eine Integraldarstellung bestimmt ist.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 15. 04. 2009.