1. **Rechnen mit Nabla.** Zeigen Sie durch Auswertung in kartesischen Koordinaten die folgende Relation und werten Sie die anderen Relationen analog dazu aus. (4 Pkt.)

$$\nabla \circ \left(\vec{V} \times \vec{W}\right) = \vec{W} \circ \left(\nabla \times \vec{V}\right) - \vec{V} \circ \left(\nabla \times \vec{W}\right)$$

- $\nabla \times \left(\Phi \cdot \vec{V}\right)$
- $\nabla \times \left(\vec{V} \times \vec{W}\right)$
- $\nabla \left(\vec{V} \circ \vec{W}\right)$

2. **Die Vektorfläche.** Der Vektor

$$\vec{a} = \int_S \mathrm{d}\vec{f}$$

wird manchmal auch Vektorfläche einer beliebigen Oberfläche genannt. Man sieht leicht, dass sein Betrag für nicht gekrümmte Flächen dem Flächeninhalt entspricht.

(a) Berechnen Sie die Vektorfläche einer Halbkugelschale ohne Boden. (1 Pkt.)

(b) Zeigen Sie, dass $\vec{a} = \vec{0}$, falls es sich um eine geschlossene Oberfläche handelt. (1 Pkt.)

(c) Beweisen Sie, dass $\vec{a}$ für alle Oberflächen mit gleichem Rand ∂S identisch ist. (1 Pkt.)

(d) Zeigen Sie für das geschlossene Wegintegral über den Rand der Oberfläche (1 Pkt.)

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \oint_{\partial S} \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{l}.$$

Hinweis: Zeichnen Sie einen Kegel vom Rand der Oberfläche zum Koordinatenursprung. Zerlegen Sie dessen Oberfläche in infinitesimale Dreiecke von der Spitze zum Rand und nutzen Sie die Eigenschaft des Kreuzproduktes.

(insgesamt 4 Pkt.)

3. **Poisson Gleichung.** Lösen Sie die Gleichung: (3 Pkt.)

$$\begin{aligned} \Delta\Phi(\vec{r}) &= \rho(\vec{r}) && \vec{r} \in V \\ \Phi(\vec{r}) &= \sigma(\vec{r}) && \vec{r} \in S(V) \quad \text{(Randbedingung)} \\ \Delta F(\vec{r}) &= 0 && \vec{r} \in V \quad \text{(homogene Lösung)} \end{aligned}$$

Hierbei ist $S(V)$ die Oberfläche des Volumens V.
Hinweis: Führen Sie $G' = G + F$, mit G - Greensche Funktion des Laplaceoperators ein. Stellen Sie $\Phi(\vec{r})$ als Integral über eine δ-Fkt dar. Nutzen sie die Beziehung $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$. Wenden Sie den 2.Greenschen Satz an um zu einer Integraldarstellung von Φ zu gelangen.

Auf diesem Übungsblatt sind maximal **11 Punkte** zu erreichen, Abgabe der ersten beiden Aufgaben erfolgt am 15. 04. 2009.