24 Herleitung der Maxwell-Gleichungen

In dieser Vorlesung werden wir die Maxwell-Gleichungen aus rein theoretischen Erwägungen herleiten. Dabei muß der Begriff „Herleitung“ allerdings mit Vorsicht betrachtet werden, da unsere Argumentation an vielen Stellen naheliegend, aber nicht zwingend ist. Das letzte und entscheidende Wort hat immer das Experiment. Dennoch ist die Herleitung, die wir hier diskutieren wollen, instruktiv, denn sie zeigt die typische Herangehensweise der theoretischen Physik. Angetrieben durch Symmetrie-Argumente und nicht selten durch ästhetische Forderungen, postuliert die moderne theoretische Physik die Existenz bis dahin unbekannter Teilchen oder Wechselwirkungsprozesse. Diese Vorgehensweise ist z.B. in der Elementarteilchenphysik heute Standard, aber im Prinzip hätten die Maxwell'schen Gleichungen auf die gleiche Art und Weise entdeckt werden können, noch vor den experimentellen Befunden von Coulomb, Ørstedt, Ampère und Hertz.

Unsere Ausgangsposition ist das Ende des Ende des 18. Jahrhunderts. Joseph-Louis Lagrange hat seine *Mécanique Analytique* (1788) veröffentlicht, die u.a. den Lagrange-Formalismus der Mechanik enthält.

24.1 Eichinvarianz der klassischen Mechanik

Die Lagrange-Funktion eines Punktteilchens der Masse m im Potential $U(\mathbf{r})$ lautet

$$L_0 = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r})\,. \tag{24.1}$$

Die zugehörige Wirkung S_0 ist das Integral

$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L_0\,.$$

Dabei hängt der Wert von S_0 von der Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ und der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ab, d.h., S_0 ist ein Funktional.

Das Hamilton'sche Prinzip besagt, daß die physikalische Bahnkurve diejenige ist, für die die Wirkung extremal wird („Prinzip der kleinsten Wirkung“). In der Tat folgt aus $\delta S_0 = 0$ (bei festgehaltenen Randpunkten $\mathbf{r}(t_1)$ und $\mathbf{r}(t_2)$) die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(\mathbf{r})\,. \tag{24.2}$$

Allerdings ist die Lagrange-Funktion eines physikalischen Systems nicht eindeutig: die Addition der totalen Zeitableitung einer beliebigen Funktion $q\Lambda(\mathbf{r}, t)$ (mit zunächst unbestimmter Konstante q) gemäß

$$L_0' = L_0 + q\,\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} \tag{24.3}$$

läßt die Bewegungsgleichung invariant, d.h., die Bedingung $\delta S_0' = 0$ führt ebenfalls auf (24.2). Diese *Eichfreiheit* der Lagrange-Funktion rührt daher, daß der zusätzliche Term im Wirkungsfunktional S_0 nur über die Endpunkte eingeht, die aber bei der Variation festgehalten werden. Die Transformation (24.3) heißt *Eichtransformation.*

24.2 Forminvarianz der Lagrange-Funktion

Die Lagrange-Funktionen L_0 und L_0' beschreiben die gleiche Physik, sehen aber selbst sehr unterschiedlich aus. Das ist ästhetisch unbefriedigend. Wir fordern deshalb, daß die Lagrange-Funktion eines Punktteilchens *forminvariant* ist unter Eichtransformationen (24.3).

Dazu müssen wir die Lagrange-Funktion eines Punktteilchens erweitern. Wie diese Erweiterung aussehen muß, zeigt uns der Eichterm:

$$q\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = q\,\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla\Lambda + q\,\frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,.$$

Im ersten Term liefert Λ einen Vektor, im zweiten einen Skalar. Forminvarianz können wir also dadurch erreichen, daß wir für die Lagrange-Funktion eines Punktteilchens die Form

$$L_{0,i} = L_0 + \underbrace{q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}(\mathbf{r},t) - q\Phi(\mathbf{r},t)}_{L_i} \tag{24.4}$$

einführen. Dabei haben wir das *Vektorpotential* $\mathbf{A}$ und das Skalarpotential Φ eingeführt.

Die Eichtransformation (24.3) führt nun auf

$$L_{0,i}' = L_0 + q\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) - q\Phi'(\mathbf{r},t)$$

mit transformierten Potentialen

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla\Lambda\\ \Phi' &= \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}\,.\end{aligned} \tag{24.5}$$

Damit ist die Lagrange-Funktion forminvariant. Die neuen Terme in der Lagrange-Funktion tauchen in der Bewegungsgleichung des Punktteilchens auf. Dazu berechnen wir die Variation:

$$\delta S_{0,1} = \delta S_0 + q\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\;\left(\nabla(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) - \nabla\Phi\right)\delta\mathbf{r}$$

Mit dem doppelten Vektorprodukt

$$\dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) - (\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\dot{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\mathbf{A}$$

läßt sich der Term $\nabla(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A})$ schreiben als

$$\nabla(\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}) = \dot{\mathbf{r}}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\,.$$

Das totale Differential $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}t$ fällt wegen der festgehaltenen Endpunkte bei der Variation heraus, alle anderen Terme müssen sich zu Null summieren, da $\delta\mathbf{r}$ beliebig ist. Das liefert die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U + q\left(-\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) + q\,\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})\,. \tag{24.6}$$

Die neuen Kräfte in der Bewegungsgleichung legen die Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned} \tag{24.7}$$

nahe. Das Feld $\mathbf{B}$ nennen wir *Magnetfeld*, das Feld $\mathbf{E}$ *elektrisches Feld*. Unsere Bewegungsgleichung lautet nun

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U + q\,\mathbf{E} + q\,\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}\,. \tag{24.8}$$

Die Konstante q, mit der das Punktteilchen an die elektromagnetischen Felder koppelt, ist eine Eigenschaft des Teilchens. Wir nennen sie *Ladung*.

Aus (24.7) folgt, daß die Felder $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ eichinvariant sind, d.h. die Transformation (24.5) der Potentiale ändert die elektromagnetischen Felder (und damit die Bewegungsgleichung) nicht.

Aus (24.7) folgen sofort die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Faraday)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(magn. Monopole)} \end{aligned} \tag{24.9}$$

Laut Helmholtz-Theorem ist ein Feld durch seine Quellen und seine Wirbel (und die Randbedingungen) eindeutig bestimmt. Wir kennen nun die Quellen von $\mathbf{B}$ und die Wirbel von $\mathbf{E}$, habe also quasi die Hälfte der Information über die elektromagnetsichen Felder. Was noch fehlt sind die inhomogenen Feldgleichungen.

24.3 Die inhomogenen Feldgleichungen

Für die Quelle von $\mathbf{E}$ schreiben wir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = K_1\rho(\mathbf{r}, t) \tag{24.10}$$

mit zunächst noch unbestimmter Konstante K_1. Um zu verstehen, was die Funktion ρ bedeutet, betrachten wir den Fall einer *singulären*, d.h. auf den Koordinatenursprung konzentrierten Felderzeugung

$$\rho(\mathbf{r}, t) = Q\,\delta(\mathbf{r})\,.$$

Zusammen mit dem Gauß'schen Integralsatz liefert (24.10)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{K_1 Q}{4\pi}\,\frac{\mathbf{r}}{r^3}\,.$$

Die Kraft, die dieses statische Feld auf eine Punktladung q ausübt, ist

$$q\mathbf{E} = \frac{K_1 q Q}{4\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^3}\,. \tag{24.11}$$

Ladung q und das Integral Q der singulären Dichte ρ gehen völlig symmetrisch in diese Kraft ein. Wir postulieren daher, daß es sich bei q und Q um die gleiche physikalische Eigenschaft handelt, nämlich Ladung. Die Funktion $\rho(\mathbf{r}, t)$ interpretieren wir deshalb als *Ladungsdichte*.

Partielle Ableitung nach der Zeit in (24.10) liefert

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{K_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0\,.$$

Das ist von der Form her eine (lokale) Erhaltungsgleichung $\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ für die Ladung, wobei die *Stromdichte* $\mathbf{j}$ die Gleichung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \nabla \cdot \left(-\frac{1}{K_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

erfüllen muß, d.h.. $\mathbf{j}$ ist von der Form

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{K_1} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{V}$$

mit unbestimmtem Vektorfeld $\mathbf{V}$. Da ρ und $\mathbf{E}$ eichinvariant sind, muß auch $\mathbf{j}$ eichinvariant sein. Der einfachste eichinvariante „andere“ Vektor ist aber das Magnetfeld $\mathbf{B}$. Wir postulieren daher $\mathbf{V} = K_2 \mathbf{B}$ mit unbestimmter Konstante K_2 und erhalten so

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{K_2}\mathbf{j} + \frac{1}{K_1 K_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\,. \tag{24.12}$$

Bei den Gleichungen (24.10) und (24.12) handelt es sich natürlich um das Gauß'sche Gesetz und um das Ampére-Maxwell Gesetz. Damit haben wir die vier Maxwell-Gleichungen gefunden.

Imsbesondere können wir jetzt die Wellengleichungen für $\mathbf{E}$ und $\mathbf{B}$ herleiten, nach denen sich elektromagentische Wellen im Vakuum mit der Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{K_1 K_2}$$

ausbreiten. Der experimentelle Nachweis dieser Wellen (mit endlichem c) zeigt, daß K_1 und K_2 beide von Null verschieden sind und das gleiche Vorzeichen haben. Das Vorzeichen von K_1 legt aber nur fest, welche Ladung wir als „positiv“ bezeichnen, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $K_1 > 0$ wählen. Im SI-System ist natürlich

$$K_1 = \frac{1}{\varepsilon_0} \qquad K_2 = \frac{1}{\mu_0}\,.$$

24.4 Alternative Herleitung der inhomogenen Feldgleichungen

Wir haben die inhomogenen Feldgleichungen (Gauß'sches Gesetz und Ampére-Maxwell Gesetz) durch die Betrachtung einer punktförmigen (singulären) Quelle für das **E**-Feld gefunden, die wir mit der Ladung eines Punktteilchens identifiziert haben. Eine alternative Herleitung betrachtet die Felder **E** und **B** als dynamische Variable, die selbst einem Prinzip der kleinsten Wirkung folgen.

Da wir mit (24.8) schon die Ladung q als Eigenschaft eines Punktteilchens gefunden haben, können wir mit

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x},t) &= q\,\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\big) \\ \mathbf{j}(\mathbf{x},t) &= q\,\dot{\mathbf{r}}\,\delta\big(\mathbf{x}-\mathbf{r}(t)\big) \end{aligned} \tag{24.13}$$

gleich die Ladungs- und die Stromdichte einführen. Die forminvariante Lagrange-Funktion eines Punktteilchens lautet mit diesen Dichten dann

$$L_{0,i} = L_0 + L_i = L_0 + \int \mathrm{d}^3x \big(\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \rho\Phi\big)\,. \tag{24.14}$$

Der Integrand wird Lagrange-Dichte genannt. Eine solche Lagrange-Dichte wollen wir auch für die elektromagnetischen Felder haben.

Die Lagrange-Funktion (und damit auch die Lagrange-Dichte) ist ein Skalar. Der einfachste Skalar, den wir aus den Felder **E** und **B** bilden können, ist das Skalarprodukt dieser Vektoren. Wir machen daher den Ansatz

$$L_{\mathrm{em}} = \int \mathrm{d}^3x \big(\alpha E^2 + \beta B^2 + \gamma \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\big) \tag{24.15}$$

mit zunächst noch unbestimmten Konstanten α, β und γ. Ebenfalls naheliegende Terme wie A^2 oder Φ^2 scheiden aus, da sie die Forminvarianz verletzen würden.

Das Gesamtsystem aus Punktladung und Feld wird nun beschrieben durch die Lagrange-Funktion

$$L = L_0 + L_i + L_{\mathrm{em}} \tag{24.16}$$

mit Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, L\,. \tag{24.17}$$

Wir drücken die elektromagnetischen Felder durch die Potentiale aus,

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{em}} &= \int D^3x \big[\alpha(\nabla\Phi + \partial_t\mathbf{A})^2 + \beta(\nabla\times\mathbf{A})^2 - \gamma(\nabla\Phi + \partial_t\mathbf{A})\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\big] \\ L_i &= \int D^3x \big[\mathbf{j}\cdot\mathbf{A} - \rho\Phi\big]\,. \end{aligned}$$

Variation bezüglich bezüglich Φ liefert den Integranden

$$2\alpha(\nabla\Phi + \partial_t\mathbf{A})\,\nabla\delta\Phi - \gamma(\nabla\times\mathbf{A})\,\nabla\delta\Phi - \rho\,\delta\Phi\,. \tag{24.18}$$

Die ersten beiden Terme formen wir um gemäß

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\big((\nabla\Phi+\partial_t\mathbf{A})\,\delta\Phi\big) &= (\nabla\Phi+\partial_t\mathbf{A})\,\nabla\delta\Phi+\big(\nabla\cdot(\nabla\Phi+\partial_t\mathbf{A})\big)\,\delta\Phi\\ \nabla\cdot\big((\nabla\times\mathbf{A})\,\delta\Phi\big) &= (\nabla\times\mathbf{A})\,\nabla\delta\Phi+\big(\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\big)\,\delta\Phi\end{aligned}$$

Da das Integral über die linken Seiten jeweils verschwindet (Gauß'scher Integralsatz, Felder sollen im Unendlichen schnell genug abfallen), wird aus (24.18)

$$-2\alpha\nabla\cdot\underbrace{(\nabla\Phi+\partial_t\mathbf{A})}_{-\mathbf{E}}\,\delta\Phi+\gamma\nabla\cdot\underbrace{(\nabla\times\mathbf{A})}_{\mathbf{B}}\,\delta\Phi-\rho\,\delta\Phi\,.$$

Wie immer muß der Koeffizient von $\delta\Phi$ verschwinden, d.h.,

$$2\alpha\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho-\gamma\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{B}}_{0}\,,$$

und mit

$$\alpha=\frac{1}{2K_1}=\frac{\varepsilon_0}{2}$$

erhalten wir das Gauß'sche Gesetz (24.10). Die Variation nach $\mathbf{A}$ ergibt

$$\begin{aligned}&2\alpha(\nabla\Phi+\partial_t\mathbf{A})\cdot\partial_t\delta\mathbf{A}+2\beta(\nabla\times\mathbf{A})\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{A})-\\ &\qquad\gamma(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\partial_t\delta\mathbf{A}-\gamma(\nabla\Phi+\partial_t\mathbf{A})\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{A})+\mathbf{j}\cdot\delta\mathbf{A}\,.\end{aligned}$$

Für die Terme mit $\partial_t\delta\mathbf{A}$ wenden wir partielle Integration an, die Terme mit $\nabla\times\delta\mathbf{A}$ formen wir gemäß

$$\nabla\cdot(\mathbf{X}\times\delta\mathbf{A})=(\nabla\times\mathbf{X})\cdot(\nabla\times\delta\mathbf{A})-(\nabla\times(\nabla\times\mathbf{X}))\cdot\delta\mathbf{A}$$

um, wobei das Integral über die linke Seite wieder verschwindet. Wir erhalten so

$$2\alpha\partial_t\mathbf{E}+2\beta(\nabla\times\mathbf{B})+\gamma\partial_t\mathbf{B}+\gamma(\nabla\times\mathbf{E})+\mathbf{j}$$

als Koeffizient von $\delta\mathbf{A}$. Dieser muß Null sein wg. $\delta S_{i,\mathrm{em}}=0$:

$$2\alpha\partial_t\mathbf{E}+2\beta(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{j}=-\gamma\big(\partial_t\mathbf{B}\nabla\times\mathbf{E}\big)$$

Die rechte Seite verschwindet aber Dank des Faraday'schen Induktionsgesetzes. Wir erhalten so

$$\nabla\times\mathbf{B}=-\frac{1}{2\beta}\,\mathbf{j}-\frac{\alpha}{\beta}\,\partial_t\mathbf{E}\,,$$

also mit

$$\alpha=\frac{1}{2K_1}=\frac{\varepsilon_0}{2}\qquad\beta=-\frac{K_2}{2}=-\frac{1}{2\mu_0}$$

das vertraute Ampére-Maxwell Gesetz.

24.5 Bemerkungen

24.1 Literatur: Unsere Herleitung der Maxwell-Gleichungen basiert auf

- D. H. Kobe. Derivation of Maxwell's equations from the gauge invariance of classical mechanics. *Am. J. Phys.*, 48(5):348–353, 1980
- J. S. Marsh. Alternate "derivation" of Maxwell's source equations from gauge invariance of classical mechanics. *Am. J. Phys.*, 61(2):177–178, 1993

24.2 Axiale Vektoren: Bei der alternativen Herleitung der inhomogenen Feldgleichungen fiel die Konstante γ komplett heraus, d.h., wir hätten schon im Ansatz $\gamma = 0$ setzen können. Das ist natürlich kein Zufall. Dazu betrachten wir das Verhalten der Bewegungsgleichung unter einer Punktspiegelung $\mathbf{r} \mapsto -\mathbf{r}$.

Die Bewegungsgleichung (24.8) muß natürlich auch nach einer Punktspiegelung noch gelten. Das heißt, $\mathbf{B}$ muß unter Punktspiegelung unverändert bleiben. Ein solcher Vektor heißt axialer Vektor oder Pseudovektor. Vektoren wie $\mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{E}$, die unter Punktspiegelungen ihr Vorzeichen ändern, heißen dagegen polare Vektoren.

Das Skalarprodukt $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ würde deshalb unter Punktspiegelung sein Vorzeichen ändern. Man spricht hier von einem Pseudoskalar. Die Lagrange-Funktion muß aber ein echter Skalar sein, d.h., wir hätten schon aus diesem Grund den Term $\gamma\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ im Ansatz weglassen können.

Axiale Vektoren treten meistens im Zusammenhang mit dem Vektorprodukt auf. Andere Beispiele ist die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und der Drehimpuls $\mathbf{L}$.