Teil A

4. Compton-Effekt **16 Pkt.**

In der Quantenmechanik wird der Compton-Effekt durch die (inelastische) Streuung eines Photons an einem (quasi) freien Elektron erklärt.

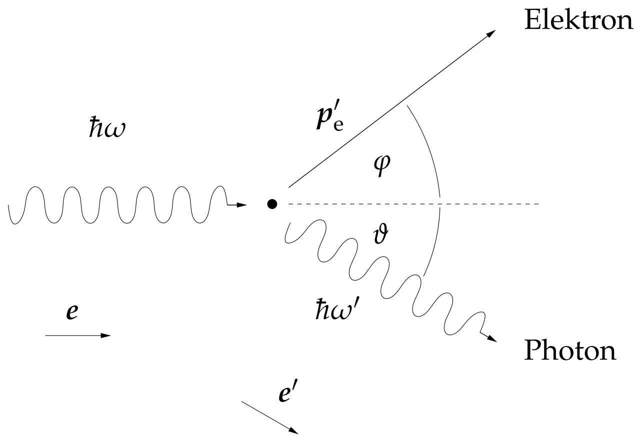

Abb. 4.1: Geometrie des Stoßes beim Compton-Effekt

(a) Ein Photon mit Anfangsimpuls $\boldsymbol{p}_{\text{Ph}} = p_{\text{Ph}}\boldsymbol{e}$ stoße auf ein Elektron. Durch den Stoß wird das Photon um den Winkel ϑ gestreut. Stellen Sie den Energie- und Impulssatz für den Stoß in relativistischer Form auf. Nehmen Sie dabei an, dass das Elektron einen Anfangsimpuls $\boldsymbol{p}_e$ in Richtung $\boldsymbol{e}$ hat. (2 Pkt.)

(b) Leiten Sie mithilfe des Energie- und Impulssatzes die folgende Formel für die Änderung der Wellenlänge $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ des Photons als Funktion der Streuwinkels ϑ ab: (4 Pkt.)

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{(p_{\text{Ph}} + p_e)\, c}{E_e - p_e c} \left(1 - \cos\vartheta\right) .$$

Zeigen Sie, dass hieraus im Fall eines verschwindenden Anfangsimpulses des Elektrons die Gleichung aus der Vorlesung

$$\triangle\lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta)$$

mit der Compton-Wellenlänge $\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$ folgt.

(c) Wie groß sind Betrag und Richtung des Rückstoßimpulses des Elektrons? Zeigen Sie, dass der Impulsübertrag bei $\vartheta = \pi$ maximal ist (der Impulsübertrag ist dort maximal, wo der Impuls nach dem Stoß am größten ist). (6 Pkt.)

(d) *Klassisch* würde ein Erklärungsversuch des Compton-Effekts folgendermaßen ansetzen: Das Elektron absorbiert eine einfallende ebene Welle und emittiert eine Kugelwelle. Im Ruhesystem des Elektrons haben beide dieselbe Frequenz. Für einen Beobachter, aus dessen Sicht das Elektron eine Geschwindigkeit $v \cdot \boldsymbol{e}$ mit (4 Pkt.)

$$v = p_e c / \sqrt{m_e^2 c^2 + p_e^2}$$

hat und der das von ihm emittierte Licht unter einem Winkel ϑ beobachtet, sind die Frequenz des auf das Elektron fallenden Lichts und die des als Kugelwelle emittierten Lichts aufgrund des Dopplereffekts verschieden. Das Elektron wird beschleunigt, weil die ebene Welle einen Impuls hat, die Kugelwelle aber keinen (im Ruhesystem

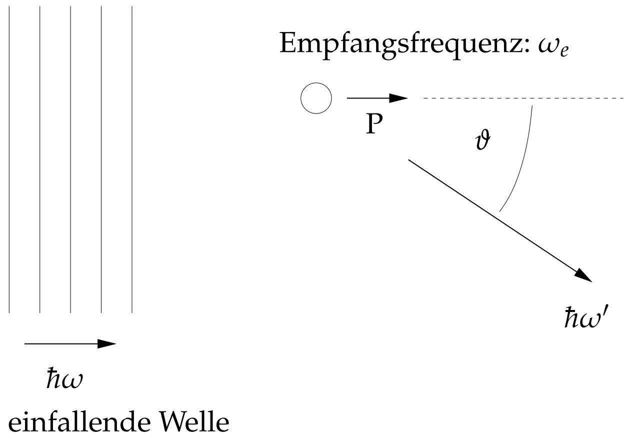

Abb. 4.2: Klassischer Compton-Effekt

des Elektrons). Zeigen Sie, dass dieser "klassische Compton-Effekt" zu einer Wellenlängenverschiebung der Form

$$\triangle\lambda = \lambda \frac{p_e c}{E_e - p_e c}(1 - \cos\vartheta)$$

führt, wo $E_e = \sqrt{m_e^2 c^4 + p_e^2 c^2}$ die Energie des Elektrons ist. Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Beschreibungen des Compton-Effekts.
Hinweis: Eine Lichtquelle bewege sich von ihrem Beobachter mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}$ weg. Aufgrund des relativistischen Dopplereffekts unterscheidet sich die im Ruhesystem des Beobachters gemessene Wellenlänge $\lambda_{\text{beob.}}$ von der Wellenlänge im Ruhesystem der Quelle $\lambda_{\text{emitt.}}$. Mit der Radialgeschwindigkeit $u_r = v \cdot \cos\alpha$ (Anteil der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ parallel zum Vektor Beobachter-Quelle) beschreibt die folgende Gleichung den Zusammenhang zwischen den in beiden Ruhesystemen gemessenen Wellenlängen:

$$\frac{\lambda_{\text{beob.}}}{\lambda_{\text{emitt.}}} = \frac{1 + \frac{u_r}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

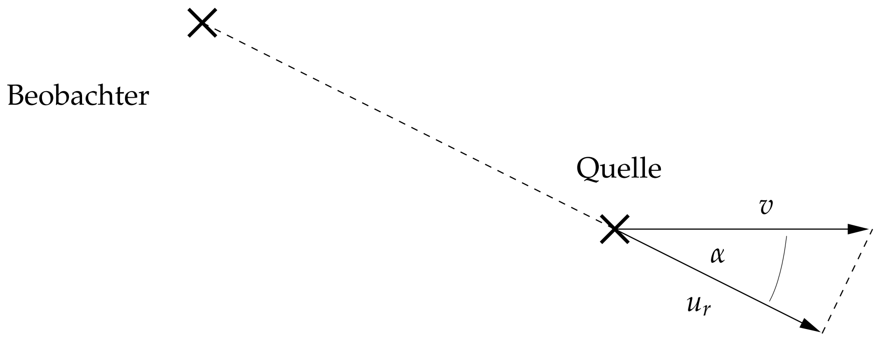

Abb. 4.3: Größen beim Doppler-Effekt. α ist der vom Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v}$ der Quelle und dem Vektor Beobachter-Quelle eingeschlossene Winkel.

Wie sieht die Formel aus, wenn die Lichtquelle ruht und der Beobachter sich von ihr weg bewegt?

In der Teilaufgabe betrachte man zunächst das Elektron als Empfänger. Vor dem Stoß bewege es sich das mit v von der Photonenquelle weg. Welche Frequenz ω_e wird vom Elektron empfangen, wenn die Lichtquelle mit ω emittiert? Nach dem Stoß empfange ein Beobachter, auf den sich das Elektron mit v zu bewegt, die Kugelwellen unter dem Winkel ϑ. Er misst die Frequenz ω'. Zur Veranschaulichung kann eine Skizze sehr hilfreich sein.

5. Der Bohr-Sommerfeld-Flummi **4 Pkt.**

Betrachten Sie die Bewegung eines (ideal) elastischen Gummiballs der Masse m im homogenen Gravitationsfeld der Erde. Seine Bewegung sei ausschließlich in z-Richtung. Bei $z = 0$ werde der Ball (perfekt) reflektiert.

(a) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion des Balls. (1 Pkt.)

(b) Zeichnen Sie eine Phasenraum-Trajektorie und bestimmen den Wert des Wirkungsintegrals (2 Pkt.)

$$J = \oint p_z \, \mathrm{d}z$$

für eine beliebige Energie E.

(c) Wie lauten die möglichen Energien, wenn man die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung (1 Pkt.)

$$\oint p_z \, \mathrm{d}z = nh$$

annimmt?

In Teil A sind insgesamt **20 Punkte** zu erreichen. Die Aufgaben werden zu den unten genannten Terminen vorgerechnet.

Teil B

2. Semiklassische Quantenzahlen: Die Bohr-Sommerfeld-Quantisierung **8 Pkt.**

Das bohrsche Atommodell ist ein semiklassisches Atommodell und stellt einen Vorläufer der Quantenmechanik dar. Innerhalb des Modells ist die Wirkung gemäß der Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung

$$\oint p(q) \, \mathrm{d}q = 2\pi n\hbar \tag{2.1}$$

für periodische Bewegungen gequantelt. Dabei ist q eine generalisierte Koordinate des Systems und p der dazu kanonisch konjugierte Impuls. Für eine (z.B. durch Anfangsbedingungen) gegebene Bahn des Systems im Phasenraum (das ist hier die qp-Ebene) wird p eine (nicht notwendigerweise eindeutige) Funktion von q.

In dieser Aufgabe soll die Bedingung (2.1) auf einige einfache, klassische Systeme angewandt werden. Das bohrsche Atommodell ist zwar keine gute Beschreibung für diese Systeme. Dennoch ist die Aufgabe eine gute technische Übung.

(a) Bestimmen Sie für ein Teilchen mit Masse m im Potential $V(x) = A|x|$ die Energie H_n des Systems in Abhängigkeit von der Quantenzahl n. Verwenden Sie dazu die Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsbedingung (2.1). Skizzieren Sie die Phasenraumtrajektorie des Systems. Das hilft beim Finden der Integrationsgrenzen für das Kurvenintegral. (2 Pkt.)

(b) Ein kräftefreies Teilchen der Masse m bewegt sich in einer eindimensionalen Box des Volumens L und wird an den Wänden vollständig elastisch reflektiert. Bestimmen Sie die Energie H_n des Systems. Skizzieren Sie auch hier die Phasenraumtrajektorie des Systems. (2 Pkt.)

(c) Eine starre Hantel mit dem Trägheitsmoment I rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Schwerpunkt. Bestimmen Sie die Energie H_n des Systems. Wie muss man hier die Phasenraumtrajektorie des Systems darstellen? (2 Pkt.)

(d) Die Erde bewegt sich näherungsweise auf einer stationären Kreisbahn um die Sonne. Geben sie auch hier die Energie des Systems H_n an und berechnen Sie näherungsweise die *Bahnquantenzahl der Erde*. (2 Pkt.)

Im Teil B können **8 Punkte** erreicht werden. Die Abgabe der Aufgabe(n) erfolgt am unten genannten Datum in den Übungen.